第 19 講　部分積分

19

［A］　以下，n を自然数とする．

(1)と(2)は不定積分を求めよ．また，(3)では I_{n+2} を I_n で表し，(4)と(5)では I_{n+1} を I_n で表せ．ただし，積分定数には C を用いよ．

(1)　$\displaystyle\int e^{2x}\sin x\,dx$

(2)　$\displaystyle\int x^2\log x\,dx$

(3)　$I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$

(4)　$I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n e^x\,dx$

(5)　$I_n=\displaystyle\int_1^e (\log x)^n\,dx$

［B］　$I_n=\displaystyle\int_0^2 (4-x^2)^{\frac{n}{2}}\,dx$ について，次の問いに答えよ．ただし，n は正の整数とする．

(1)　I_{n+2} を I_n を用いて表せ．

(2)　I_5 を求めよ．

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 19 講　部分積分

19　n は 0 または正の整数とし，

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$$

とおく．

(1)　$I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ であることを示せ．ただし，$n\geqq 2$ とする．

(2)　$\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{x-x^2}\,dx$ を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 19 講　部分積分

19

［A］　以下，n を自然数とする．

(1)と(2)は不定積分を求めよ．また，(3)では I_{n+2} を I_n で表し，(4)と(5)では I_{n+1} を I_n で表せ．ただし，積分定数には C を用いよ．

(1)　$\displaystyle\int e^{2x}\sin x\,dx$

(2)　$\displaystyle\int x^2\log x\,dx$

(3)　$I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$

(4)　$I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n e^x\,dx$

(5)　$I_n=\displaystyle\int_1^e (\log x)^n\,dx$

［B］　$I_n=\displaystyle\int_0^2 (4-x^2)^{\frac{n}{2}}\,dx$ について，次の問いに答えよ．ただし，n は正の整数とする．

(1)　I_{n+2} を I_n を用いて表せ．

(2)　I_5 を求めよ．

【答】　［A］　(1) $\dfrac{e^{2x}}{5}(2\sin x-\cos x)+C$　(2) $\dfrac{x^3}{9}(3\log x-1)+C$　(3) $I_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}I_n$

(4) $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$　(5) $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$

［B］　(1) $I_{n+2}=\dfrac{4(n+2)}{n+3}I_n$　(2) 10π

【解説】

［A］　(1)　$I=\displaystyle\int e^{2x}\sin x\,dx$ とおくと，

$$I=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\int\frac{1}{2}e^{2x}\cos x\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\left\{\frac{1}{4}e^{2x}\cos x-\int\frac{1}{4}e^{2x}\cdot(-\sin x)dx\right\}$$ より

$I=\dfrac{e^{2x}}{4}(2\sin x-\cos x)-\dfrac{1}{4}I$ となるので，$I=\boldsymbol{\dfrac{e^{2x}}{5}(2\sin x-\cos x)+C}$

(2)　
$$\int x^2\log x\,dx=\frac{1}{3}x^3\log x-\int\frac{1}{3}x^3\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{1}{3}x^3\log x-\int\frac{1}{3}x^2\,dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3\log x-\frac{1}{9}x^3+C=\boldsymbol{\frac{x^3}{9}(3\log x-1)+C}$$

(3)　
$$I_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+2}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cos^{n+1}x\,dx$$
$$=\Big[\sin x\cos^{n+1}x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot(n+1)\cos^n x\cdot(-\sin x)dx$$
$$=(n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\cos^n x\,dx=(n+1)I_n-(n+1)I_{n+2}$$

となるので　$(n+2)I_{n+2}=(n+1)I_n$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ゆえに　$\boldsymbol{I_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}I_n}$

(4)　$I_{n+1}=\displaystyle\int_0^1 x^{n+1}e^x dx=\Big[x^{n+1}e^x\Big]_0^1-\int_0^1(n+1)x^n e^x dx=\boldsymbol{e-(n+1)I_n}$

(5)　$I_{n+1}=\displaystyle\int_1^e(\log x)^{n+1}dx=\Big[x(\log x)^{n+1}\Big]_1^e-\int_1^e x\cdot(n+1)(\log x)^n\cdot\frac{1}{x}dx$

$\qquad\displaystyle=e-(n+1)\int_1^e(\log x)^n dx$

となるので　$\boldsymbol{I_{n+1}=e-(n+1)I_n}$

［B］ (1)　$x=2\cos\theta\ (0\leqq x\leqq\pi)$ とおくと $x=2$ のとき $\theta=0$，$x=0$ のとき $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，

$dx=-2\sin\theta d\theta$ となるので

$$I_n=\int_{\frac{\pi}{2}}^0(4-4\cos^2\theta)^{\frac{n}{2}}\cdot(-2\sin\theta)d\theta$$

$$=2^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\theta d\theta$$

ここで

$$(\cos\theta\sin^{n+2}\theta)'=-\sin^{n+3}\theta+(n+2)\cos\theta\sin^{n+1}\theta\cos\theta$$
$$=-(n+3)\sin^{n+3}\theta+(n+2)\sin^{n+1}\theta$$

より

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta\sin^{n+2}\theta)'d\theta=\Big[\cos\theta\sin^{n+2}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=-(n+3)\cdot\frac{I_{n+2}}{2^{n+3}}+(n+2)\cdot\frac{I_n}{2^{n+1}}$$

$$\iff\quad \boldsymbol{I_{n+2}=\frac{4(n+2)}{n+3}I_n}$$

(2)

$$I_5=\frac{4\cdot5}{6}I_3$$
$$=\frac{4\cdot5}{6}\cdot\frac{4\cdot3}{4}I_1$$
$$=\frac{4\cdot5}{6}\cdot\frac{4\cdot3}{4}\cdot2^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta$$
$$=20\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos2\theta)d\theta$$
$$=20\Big[\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\boldsymbol{10\pi}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第19講　部分積分

19　n は0または正の整数とし，

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$$

とおく．

(1)　$I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$ であることを示せ．ただし，$n \geqq 2$ とする．

(2)　$\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{x-x^2}\,dx$ を求めよ．

【答】 (1) 略　(2) $\dfrac{5}{128}\pi$

【解説】

(1)　$\sin^n x=\sin x\cdot\sin^{n-1}x$ と考えると

$$\begin{aligned} I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\sin^{n-1}x\,dx\\ &=\Big[-\cos x\sin^{n-1}x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos x)\cdot(n-1)\sin^{n-2}x\cdot\cos x\,dx\\ &=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}x\,dx\\ &=(n-1)(I_{n-2}-I_n)\end{aligned}$$

$\therefore\quad nI_n=(n-1)I_{n-2}$

$\therefore\quad I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　$x-x^2=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$ より $x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cos\theta$ とおくと

$$\begin{cases} x=0 \text{ のとき} \quad \theta=\pi \\ x=1 \text{ のとき} \quad \theta=0 \end{cases}$$

となるので

$$\int_0^1 x^2\sqrt{x-x^2}\,dx$$
$$=\int_\pi^0 \left\{\frac{1}{2}(1+\cos\theta)\right\}^2\sqrt{\frac{1}{4}(1-\cos^2\theta)}\cdot\left(-\frac{1}{2}\sin\theta\right)d\theta$$
$$=\frac{1}{16}\int_0^\pi (2\sin^2\theta-\sin^4\theta+2\sin^2\theta\cos\theta)\,d\theta$$
$$=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin^2\theta-\sin^4\theta)\,d\theta$$
$$=\frac{1}{8}(2I_2-I_4)$$
$$=\frac{1}{8}\left(2I_2-\frac{3}{4}I_2\right)$$
$$=\frac{5}{32}I_2$$
$$=\frac{5}{32}\cdot\frac{1}{2}I_0$$
$$=\frac{5}{64}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx$$
$$=\boldsymbol{\frac{5}{128}\pi}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。